# 每日一练 Day1

1、

设$f(x)=\sin(\cos 2^{x}), x\in R$,则此函数是（）

$A$、有界函数 B、奇函数 C、偶函数 D、周期函数

2、

若函数$y=f(x)$是区间$[1,5]$上的连续函数，则该函数一定（）

$A$、在区间$[1,5]$上可积

$B$、在区间(1,5)上有最小值

C、在区间(1,5)上可导

D、在区间(1,5)上有最大值

3、若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则函数 $f(x)$ 有一个原函数是（）

$A$、$1+\sin x$　$B$、$1-\sin x$　$C$、$1+\cos x$　$D$、$1-\cos x$

4、方程$y'=xy$是_____阶微分方程

5、若$f(x)=\int_{x}^{x^{2}}\sin t^{2}dt$,则$f'(x)=?$

【答案解析】

1、

由于$1<\sin(\cos 2^{x})<1$,故$f(x)$为有界函数，显然容易验证$f(x)$不是奇偶函数和周期函数

2、

答案：$A$

只有闭区间上的连续函数才能满足最值定理，而$BD$选项均为开区间，所以错误，而连续不一定可导，所以C错误，连续函数一定可积所以选A

3 、

$f'(x)=\sin x$,则$f(x)=\int f'(x)dx=\int \sin xdx=-\cos x+C$

$\int f(x)dx=\int(-\cos x+C)dx=-\sin x+Cx+C_{1}$,令$C=0$，$C_{1}=1$

故$f(x)$的一个原函数为 $1-\sin x$

4、一阶

5、

$$f'(x)=(x^{2})'\sin(x^{2})^{2}-\sin x^{2}=2x\sin x^{4}-\sin x^{2}$$

# 每日一练 Day2

1、

当$x \to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，$g(x)$的极限不存在，那么下列说法正确的是（）

$A$、$f(x)g(x)$必定极限存在

$B$、$f(x)g(x)$必定极限不存在

$C$、若$f(x)g(x)$极限存在，极限必定为零

$D$、$f(x)g(x)$极限可能存在，也可能不存在

2、

已知函数 $f(x)$ 为可导函数，且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则下列关系式不成立的是（）

$A$、$d[\int f(x)dx] = f(x)dx$　　$B$、$(\int f(x)dx)' = f(x)$

$C$、$\int F'(x)dx = F(x) + C$　　$D$、$\int f'(x)dx = F(x) + C$

3、$y'' + 2y' - 3y = e^x$是_____阶微分方程

4、已知 $F(x) = \int_{x^2}^{\sin x} \sqrt{1+t}\,dt$，求$F'(x)$

5、已知两点$A$(4,0,5）和B（7,1,3），求与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量$\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}$

【答案解析】

1

1)收敛+收敛=收敛，收敛+发散=发散，发散+发散=?

2)收敛×收敛=收敛，收敛×发散=$\begin{cases} \text{发散，收敛}\neq 0 \\ ?\text{，收敛}=0 \end{cases}$，发散×发散=?

收敛x发散的极限类型可以为$0\cdot\infty$未定式，故其结果有可能极限存在，也可能极限不存在。

答案：$D$

2、$\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C$

3、二阶

4、$F'(x) = -\sqrt{1+x^2}(2x) + \sqrt{1+\sin x}\bullet\cos x = -2x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\sin x}\bullet\cos x$

5、

$$\text{因为}\overrightarrow{AB}=(3,1,-2)\text{，所以}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

$$\text{故}\vec{e}_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2) = (\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}})$$

# 每日一练 Day3

1、

当$x \to x_0$时，$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小，则当$x \to x_0$时，$f(x)-g(x)$是$g(x)$的()

A、等价无穷小

B、同阶无穷小

C、高阶无穷小

D、低阶无穷小

**2、设$\int f(x)dx = x^2 + C$，则$\int xf(1-x^2)dx =$ ()**

A、$-2(1-x^2)^2+C$　B、$2(1-x^2)^2+C$　C、$-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　D、$\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

3、$(t^2+x)dt + xdx = 0$是____阶微分方程

4、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

5、设$\vec{a}=(2,1,-1), \vec{b}=(1,-1,2)$, 计算$\vec{a}\bullet\vec{b}$和$\vec{a}\times\vec{b}$

【答案解析】：

1、

当$x \to x_0$时，$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小，可得$\lim\limits_{x\to x_{0}} \frac{f(x)}{g(x)}=0$,要比较$f(x)-g(x)$与$g(x)$的阶数

即需计算$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_{0}}\frac{f(x)}{g(x)}-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{g(x)}=0-1=-1$,所以为同阶无穷小

2、

C　$\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

3、一阶

4、原式$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x d(\cos x) = \left[-\frac{1}{6}\cos^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$

5、

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = 2\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot2=-1$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(1,-5,-3)$$

# 每日一练 Day4

1、

设$f(x)$在$x=a$处可导，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=()$

A、$f'(a)$

B、$2f'(a)$

C、0

D、$f'(2a)$

2、若$\int f'(x^3)dx=x^3+C$，则$f(x)=$（）

A、$x+C$ B、$x^3+C$ C、$\dfrac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$ D、$\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

3、求方程$xy'=y\ln y$的通解

4、$\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

5、求点$M$(4，-3，5）到各坐标轴的距离

**【答案解析】**

1、根据题意已知$f'(a)$存在，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a)-f(a-x)}{x}$

$=f'(a)+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$

答案：B

2、C $\int f'(x^3)dx=x^3+C$，两边求导得 $f'(x^3)=3x^2=3(x^3)^{\frac{2}{3}}$，故 $f'(x)=3x^{\frac{2}{3}}$，两边积分

得 $\int f'(x)dx=\int 3x^{\frac{2}{3}}dx$，则 $f(x)=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

3、

$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{x}dx$

$\int\frac{1}{\ln y}d\ln y=\int\frac{1}{x}dx$

$\ln\ln y=\ln x+\ln C=\ln Cx$

$\ln y=Cx$ 通解为 $y=e^{Cx}$

4、$\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\ln x\,d(\ln x)=\left[\frac{1}{2}\ln^2x\right]_1^e=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

5、

由于点$M$在$x$轴，y轴，z轴上的垂足分别是$M_1(4,0,0)$、$M_2(0,-3,0)$、$M_3(0,0,5)$

故点$M$(4, -3, 5) 到各坐标轴的距离分别为

$|M_1M|=\sqrt{0^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$

$|M_2M|=\sqrt{4^2+0^2+5^2}=\sqrt{41}$

$|M_3M|=\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}=5$

# 每日一练 Day5

1、

已知函数$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,则$x=0$是$f(x)$的()

$A$、可去间断点

$B$、连续点

$C$、跳跃间断点

$D$、第二类间断点

2、若 $f'(\ln x)=1+\ln x$,则 $f(t)=$ （）

$A$、$t+\dfrac{t^2}{2}+C$　$B$、$1+\ln t+C$　$C$、$t\ln t+C$　$D$、$t+\dfrac{1}{t}+C$

3、求方程$y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$的通解

4、$\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{(11+5x)^3}dx$

5、已知三点$M$(1,1,1)、A（2,2,1）和B（2,1,2），求∠AMB

【答案解析】

1、

由于$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,所以$x=0$时第二类间断点

答案：D

2、

$f'(\ln x)=1+\ln x$,则$f'(x)=1+x$,故$f(x)=x+\dfrac{x^2}{2}+C$

答 案： $A$

3、

$$P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=\frac{\sin x}{x},$$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int\sin x dx+C\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

4、

原式$=\dfrac{1}{5}\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{(11+5x)^3}d(11+5x)=\dfrac{1}{5}\left[-\dfrac{1}{2}(11+5x)^{-2}\right]_{-2}^{1}=\dfrac{51}{512}$

5、

$\angle AMB$即为向量$\overrightarrow{MA}$与向量$\overrightarrow{MB}$的夹角， 由$\overrightarrow{MA}=(1,1,0),\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$

得$\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{1+0+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$,故$\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$

# 每日一练 Day6

1、

函数$f(x)=x^3-3x$上的切线方程平行于$x$轴的点是()

$A$、$(0,0)$

$B$、$(1,2)$

$C$、$(-1,2)$

$D$、$(1,3)$

2、

经过点（1,0）且在其任意一点 x 处的切线斜率为$3x^2$的曲线方程是

$A$、$y=x^3-1$　$B$、$y=x^2-1$　$C$、$y=x^3+1$　$D$、$y=x^3+C$

3、求方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解

4、$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$

5、求平行于$\vec{a}=(6,7,-6)$的单位向量

**【答案解析】：**

1、

一点处的导数的几何意义表示曲线在该点处切线的斜率

$f'(x)=3x^2-3$,切线方程平行于$x$轴故切线斜率为0，所以有$3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1$,

可得点为$(-1,2)$或者$(1,-2)$

答案：$C$

2、

因为$y'=3x^2$,所以$y=\int y'dx=x^3+C$,又过点（1,0），所以 $C=-1$

3、

分离变量得,$\frac{dy}{y}=2xdx$，两端积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$

得$\ln|y|=x^2+C_1$，从而$y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}=Ce^{x^2}$，

即原方程的通解为$y=Ce^{x^2}$

4、

设 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos tdt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$．故

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^2}{4}$$

5、

平行于$\vec{a}=(6,7,-6)$的单位向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，一个与$\vec{a}$反向，

且$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$

故所求单位向量为$\vec{e}=\pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11})$

# 每日一练 Day7

1、极限 $\lim_{x\to 0} x\cdot\ln\sin(x^2)=$______

2、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int\cos x f(\sin x)dx=$

$A$、$F(\cos x)+C$　$B$、$F(\sin x)+C$　$C$、$-F(\cos x)+C$　$D$、$-F(\sin x)+C$

3、求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y}{1+x}$ 的通解

4、$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

5、已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2$（3, 3, 1）、$M_3$（3, 1, 3），求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量

【答案解析】：

1、

该极限为$0\cdot\infty$类型，先转化为$\frac{\infty}{\infty}$，再使用洛必达法则进行计算

$$\lim_{x\to0}x\cdot\ln\sin(x^2)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin(x^2)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin(x^2)}\cos(x^2)2x}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0}2x\cos(x^2)=0$$

2、

$$\int\cos xf(\sin x)dx=\int f(\sin x)d\sin x\underset{u=\sin x}{=}\int f(u)du=F(u)+C=F(\sin x)+C$$

3、

分离变量得，$\frac{1}{1-y}dy=\frac{1}{1+x}dx$ 两端同时积分 $\int\frac{1}{1-y}dy=\int\frac{1}{1+x}dx$

得$-\ln|1-y|+\ln|C|=\ln|1+x|$即$(1-y)(1+x)=C$

于是方程的通解$y=1-\frac{C}{1+x}$

4、

设$\sqrt{2x+1}=t$，则$x=\frac{t^2-1}{2}$，$dx=tdt$，且当$x=0$时，$t=1$；

当$x=4$时，$t=3$故

$$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}dt=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3=\frac{1}{2}\left[(\frac{27}{3}+9)-(\frac{1}{3}+3)\right]=\frac{22}{3}$$

5、

已知$M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$和$M_3(3,1,3)$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1),\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2),\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=(6,-4,-4)$$

记$\vec{a}=(6,-4,-4)$,则$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=2\sqrt{17}$

与$\vec{a}$同方向的单位向量为$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}})$

故与$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量为$\pm(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}})$

# 每日一练 Day8

1、函数$y=\sqrt{\sin x}$的定义域是______

2、已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则不定积分$\int f(x-1)dx=$

A、$F(x-1)+C$　B、$F(x)+C$　C、$-F(x-1)+C$　D、$-F(x)+C$

3、求$(x+xy^2)dx-(x^2y+y)dy=0$的通解

4、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x \sin\pi t dt}{1+\cos\pi x}$

5、已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2$(1, 3, 0)，计算向量$\overline{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角

**【答案解析】：**

1、要使得$\sqrt{\sin x}$有意义，则$\sin x\geq0$,所以$x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k\in Z$

2

**A 由题可知**

$\int f(x)dx=F(x)+C,\int f(x-1)dx=\int f(x-1)d(x-1)=F(x-1)+C$

3、

原式可化为$x(1+y^2)dx=y(x^2+1)dy$,

分离变量得$\dfrac{y}{1+y^2}dy=\dfrac{x}{1+x^2}dx$

两边同时积分得$\int\dfrac{y}{1+y^2}dy=\int\dfrac{x}{1+x^2}dx$

得$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln|C|$

于是方程的通解为$y^2=C(1+x^2)-1$

此极限是$\dfrac{0}{0}$型未定式，有洛必达法 则，得

4、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x \sin\pi t dt}{1+\cos\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\int_1^x \sin\pi t dt)'}{(1+\cos\pi x)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{-\pi\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{-\pi}\right)=-\dfrac{1}{\pi}$

5、

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2}),\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+1+2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}$$

# 每日一练 Day9

1、已知$f'(1)=1,\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}=$______

2、若$\int f'(x^3)dx=x^3+C$，则$f(x)=$()

$A$、$x+C$，$B$、$x^3+C$，$C$、$\dfrac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$，$D$、$\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

3、求$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解

4、$\int_0^2|1-x|dx$

5、已知向量$\vec{a}=(2,1,-2)$与向量$\vec{b}=(3,-2,x)$垂直，求$x$的值

**【答案解析】：**

将极限转化为倒数的定义式：

1、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)+f(1)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2f'(1)=-2$

2、C

由$\int f'(x^3)dx=x^3+C$知，$f'(x^3)=3x^2$，令$x^3=u$，则$f'(u)=3u^{\frac{2}{3}}$

$$f(u)=3\int u^{\frac{2}{3}}du=\frac{9}{5}u^{\frac{5}{3}}+C$$

3、

$P(x)=-\dfrac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{2\ln(x+1)}\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-2\ln(x+1)}dx+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

4、

$$\int_0^2|1-x|dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=-\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1+\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

5、由于$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow 2\cdot 3+1\cdot(-2)-2x=0$，解得$x=2$

# 每日一练 Day10

1、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x\sin x-ax(1+x)}{\sin^3 x},-\pi<x<0\\ \dfrac{1}{3},x\geq 0\end{cases}$，若$f(x)$连续，求$a$的值

2、若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为（）

$A$、$1+\sin x$　$B$、$1-\sin x$　$C$、$1+\cos x$　$D$、$1-\cos x$

3、求$xy'+y=x^2+3x+2$的通解

4、$\int_{-2}^{1}x^2|x|dx$

5、已知向量$\vec{a}=(2,1,-2)$与向量$\vec{b}=(3,x,y)$平行，求$x+y$的值

**【答案解析】：**

1、

因为函数连续，则函数在$x=0$处连续，所以有 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{3}$，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\sin x-ax(1+x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\sin x-ax-ax^2}{x^3}$$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-a-2ax}{3x^2}$,其中$x\to 0$时，分母$3x^2\to 0$,要保证极限存在，

则$\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x\sin x+e^x\cos x-a-2ax)=0$，所以$a=1$

2、B

由原题知 $f'(x)=\sin x$,则$f'(x)=-\cos x+C_1$,$\int f(x)dx=-\sin x+C_1x+C_2$

当$C_1=0$，$C_2=1$，右端为 ,$1-\sin x$

3、

原方程变形为$y'+\dfrac{1}{x}y=x+\dfrac{2}{x}+3$　其中 $P(x)=\dfrac{1}{x}$　$Q(x)=x+\dfrac{2}{x}+3$

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(x+\frac{2}{x}+3)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln x}\left[\int(x+\frac{2}{x}+3)e^{\ln x}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x+\frac{2}{x}+3)xdx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x^2+3x+2)dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+C)$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{C}{x}+2$$

4、

$$\int_{-2}^{1}x^2|x|dx=\int_{-2}^{0}(-x^3)dx+\int_0^1 x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

5、由于$\vec{a}//\vec{b}\Rightarrow\dfrac{3}{2}=\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2},y=-3$

# 每日一练 Day11

1、已知$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，求$f'(x)$

2、$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$

3、求$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$的通解

4、$\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$

5、求过三点$M_1$(2,-1,4) $M_2$(-1,3,-2) $M_3$(0,2,3) 的平面方程

【答案解析】：

1、

求分段函数导数时，分段点的导数必须运用导数的定义公式

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$$

当$x\neq 0$时，$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}\right)$,而$x=0$时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0\text{，所以其导函数}f'(x)\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$$

2、

$$\text{原式}=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=x-\int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=x-\ln(1+e^x)+C$$

$$\text{原式}=\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\int\frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}=-\ln(e^{-x}+1)+C$$

3、

11、原方程变形为$y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$，其中 $P(x)=\frac{2x}{x^2-1}$，$Q(x)=\frac{\cos x}{x^2-1}$

故原方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\ln(x^2-1)}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot(x^2-1)dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-1}(\int\cos xdx+C)==\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$$

4、

$$\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=2+2=4$$

5、

先找出平面的法向量n

$$n=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14i+9j-k$$

由点法式方程得平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

即$14x+9y-z-15=0$

# 每日一练 Day12

1、设$f(x)$在$R$上连续，$f(2)=3$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}f(\dfrac{\sin 2x}{x})=$____

2、$\int\dfrac{x}{1+x^2}dx$

3、求$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$的通解

4、$\int_0^4\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

5、过原点（0,0,0）且垂直于向量（1,1,1）的平面方程为

【答案解析】：

1、

$f(x)$在$R$上连续，所以有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}f(\frac{\sin 2x}{x})=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}f(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x})=3f(2)=9$$

答案：9

2、

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

3、

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}(\int\sin xdx+C)$$

$$=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

4、

利用换元积分法，注意在换元时必须同时换限

令$t=\sqrt{x},x=t^2,dx=2tdt$

当$x=0$时，$t=0$,当$x=4$时，$t=2$，于是

$$\int_0^4\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int_0^2\frac{1-t}{1+t}2tdt=\int_0^2[4-2t-\frac{4}{1+t}]dt$$

$$=[4t-t^2-4\ln|1+t|]_0^2=4-4\ln 3$$

5、由题意知，平面的法向量为（1,1,1），则平面方程可设为x+y+z+D=0,因而平面过（0,0,0）点，所以D=0，即x+y+z=0

# 每日一练 Day13

1、设函数$f(x)=\begin{cases}x+1, x<0\\1, x\geq 0\end{cases}$，求$f[f(x)]=$______

2、$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$

3、求$y''-2y'-3y=0$的通解

4、$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\tan x dx$

5、设平面过原点及点（6,-3,2），且与平面4x-y+2z=8垂直，求此平面方程

【答案解析】：

1、$f[f(x)]=\begin{cases}f(x)+1, f(x)<0\\1, f(x)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}(x+1)+1, x<-1\\1, x\geq -1\end{cases}=\begin{cases}x+2, x<-1\\1, x\geq -1\end{cases}$

2、原式$=\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\int \frac{d\sin^2 x}{1+(\sin^2 x)^2}=\arctan(\sin^2 x)+C$

3、

所给微分方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$即 $(r+1)(r-3)=0$

有两个不相等的实根 $r_1=-1$，$r_2=3$因此原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

4、$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\tan x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x d(\sec x)=\frac{1}{4}\sec^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

5、

设平面为$Ax+By+Cz+D=0$,由平面过原点知D=0

由平面过点（6,-3,2）知6A-3B+2C=0

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}\therefore 4A-B+2C=0\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C$

所求平面方程为$2x+2y-3z=0$

# 每日一练 Day14

1、设函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x<0\\1,x\geq 0\end{cases}$,求$f[f(x)]=$______

2、$\int \tan^2 xdx$

3、求$y''-8y'+16y=0$的通解

4、$\int_0^1 \arctan xdx$

5、已知平面过两点A（1,1,1）和B（2,2,2），且与平面x+y-z=0垂直，求它的方程

【答案解析】：

1、$f[f(x)]=\begin{cases}f(x)+1,f(x)<0\\1,f(x)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}(x+1)+1,x<-1\\1,x\geq -1\end{cases}=\begin{cases}x+2,x<-1\\1,x\geq -1\end{cases}$

2、$\int \tan^2 xdx=\int(\sec^2 x-1)dx=\int \sec^2 xdx-\int dx=\tan x-x+C$

3、

所给微分方程的特征方程为 $r^2-8r+16=0$ 即 $(r-4)^2=0$

有两个相等的实根 $r_1=r_2=4$ 因此原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{4x}$

4、

$$\int_0^1 \arctan xdx=x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

5、

$$\vec{n_1}=\{1,1,-1\},\overrightarrow{AB}=\{1,1,1\},\text{取}\vec{n}=\vec{n_1}\times\overrightarrow{AB},\text{而}\vec{n_1}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=2i-2j$$

所以$\vec{n}=\{2,-2,0\}$，即所求平面方程为2（x-1）-2(y-1)=0

即$x-y=0$

# 每日一练 Day15

1、函数$y=x\ln(e+\frac{1}{x})(x>0)$的渐近线是______

2、$\int \sec x(\sec x-\tan x)dx$

3、$y''-4y'+4y=0$的通解

4、$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

5、求过点$M$(1,-2,4）且与平面2x-3y+z-4=0垂直的直线方程

【答案解析】：

1、

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(e+\frac{1}{x})=0$,所以不存在垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(e+\frac{1}{x})=+\infty$，所以不存在水平渐近线

设$y=kx+b$为水平渐近线，所以k=$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{e+t}=\frac{1}{e}$,所以斜渐近线为$y=x+\frac{1}{e}$

2、$\int \sec x(\sec x-\tan x)dx=\int \sec^2 xdx-\int \sec x\tan xdx$

3、

所给微分方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$ 有两个相等的实根 $r_1=r_2=,2$

故原方程的通解 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}=(C_1+C_2x)e^{2x}$

4、$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{-x})-(-1)=0+1=1$

5、

由题意，可取直线的方向向量$\vec{s}=(2,-3,1)$

故所求直线方程为$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$

# 每日一练 Day16

1、设$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，则$y'(0)=$______

2、$\int x\cos xdx$

3、求$y''+y'=0$的通解

4、$\int_0^{\pi} x\cos xdx=$

5、求过两点$M_1(3,-2,1)M_2(-1,0,2)$的直线方程

【答案解析】：

1、

当遇到对数函数时，可以先利用对数函数的性质进行化简

$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\ln(\dfrac{1-x}{1+x})^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1-x}{1+x})=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$,所以$y'=\dfrac{1}{2}(\dfrac{-1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x})$,可得$y'(0)=-1$

2、$\int x\cos xdx=\int xd(\sin x)=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$

3、

原方程的特征方程为 $r^2+r=0$,有两个不相等的 实根，$r_1=0$，$r_2=-1$

因此原方程的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1+C_2e^{r_2x}=C_1+C_2e^{-x}$

4、$\int_0^{\pi} x\cos xdx=\int_0^{\pi} xd\sin x=(x\sin x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx=\cos x\Big|_0^{\pi}=-2$

5、

取$\vec{s}=\overrightarrow{M_2M_1}=(4,-2,-1)$,则所求直线方程为$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{5}$

# 每日一练 Day17

1、数列极限$\lim_{n\to\infty} n[\ln(n-1)-\ln n]=$______

2、$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$

3、求微分方程$x^2dy+(y-2xy-2x^2)dx=0$满足初始条件$y|_{x=1}=2+e$的特解

4、由曲线$y=\sqrt{x}, y=x$所围成的平面图形的面积是______

5、

设$f(x)=\int_0^x (t-1)sintdt, f'(x)=$

**【答案解析】：**

1、

$$\lim_{n\to\infty} n[\ln(n-1)-\ln n]=\lim_{n\to\infty} n\ln(1-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty} n(-\frac{1}{n})=-1$$

2、

$$\int\frac{1}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{1}{(x-4)^2+9}dx=\frac{1}{9}\int\frac{1}{(\frac{x-4}{3})^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(\frac{x-4}{3})^2+1}d(\frac{x-4}{3})=\frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$$

3、

故方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$$=e^{-\int\frac{1-2x}{x^2}dx}\left[\int 2e^{\int\frac{1-2x}{x^2}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{1}{x}+\ln x^2}\left[\int 2e^{-\frac{1}{x}-\ln x^2}dx+C\right]$$

$$=x^2e^{\frac{1}{x}}\left[\int 2\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx+C\right]$$

$$=x^2e^{\frac{1}{x}}(2e^{-\frac{1}{x}}+C)=2x^2+Cx^2e^{\frac{1}{x}}$$

由初始条件 $x=1$ 时，$y=2+e$，代入上式通解形式中得

$2+e=2+Ce, C=1$

故所求特解为：$y=x^2(2+e^{\frac{1}{x}})$

4、曲线 $y=\sqrt{x}, y=x$ 的交点为 $(1,1)$，故其面积 $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

5、*由变上限积分求导公式，得* $f'(x)=(x-1)\sin x$

# 每日一练 Day18

1、若 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+ax+b)=2$,则$a$和$b$的值为 ________

2、$\int x\arctan x dx$

3、求微分方程$y'=e^{2x-y}$,满足初始条件$y|_{x=0}=0$的特解

4、$\int_0^1 \frac{2\ln(1+x)}{1+x}dx$

5、求直线$L$:$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与平面$\pi$：2x+y+z-6=0交点

【答案解析】：

1、

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+ax+b)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+ax)+b=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{ax(x+1)}{x+1})+b$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{(1+a)x^2+1+ax}{x+1})+b$,要使极限存在，则a=-1,当a=-1时，极限可以化为

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1-x}{1+x})+b=-1+b=2$,所以$b=3$

2、$\int x\arctan xdx=\int\arctan xd(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}d(\arctan x)$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

3、

$$y'=e^{2x-y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{2x}e^{-y}\Rightarrow e^y dy=e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow\int e^y dy=\int e^{2x}dx\Rightarrow e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C\Rightarrow y=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}+C)$$

4、原式$=\int_0^1 2\ln(1+x)d\ln(1+x)=\ln^2(1+x)\big|_0^1=\ln^2 2$

5、

由题意，可设交点坐标为M（2+t,3+t,4+2t）

代入平面方程，得2（2+t）+3+t+4+2t-6=0

解得，t=-1,代入交点坐标M（2+t,3+t,4+2t）

得交点坐标为M（1,2,2）

# 每日一练 Day19

1、设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x},-2<x<0\\ a,x\geq 0\end{cases}$,在$x=0$处连续，则必有$a=$___

2、$\int x\ln xdx$

3、求微分方程$y'\sin x=y\ln y$满足初始条件$y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$的特解

4、若$f(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt$,则$f(x)=$______

5、试将直线$L$:$\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z+9=0\end{cases}$化为标准式方程

【答案解析】

1、

$$\text{函数在}x=0\text{处连续},\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

2、

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{\sqrt{2}}{2},\text{所以}f(0)=a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int x\ln x dx=\int \ln x d(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

3、

$$y'\sin x=y\ln y\Rightarrow\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y\Rightarrow\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}\Rightarrow\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$\Rightarrow\ln|\ln y|=\ln|C_1(\sec x-\cot x)|\Rightarrow\ln y=\pm C_1(\csc x-\cot x)\Rightarrow\ln y=C(\csc x-\cot x)$$

$$\Rightarrow y=e^{C(\csc x-\cot x)},\text{将}y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e\text{代入通解，得}C=1\text{，故原方程的特解为}y=e^{(\csc x-\cot x)}$$

变限函数求导数时u，当被积函数中含有x时，可以做变量代换消去x

4、 $\int_0^x\sin(t-x)dt \underset{u=t-x}{=} \int_{-x}^0\sin udu$，故 $\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t-x)dt=\frac{d}{dx}\int_{-x}^0\sin udu=\sin(-x)=-\sin x$

5、

令$x=0$，由$\begin{cases}-4y+z=0\\-y-2z+9=0\end{cases}$，解得y=1，z=4，由此直线上一点$M_1(0,1,4)$，直线$L$的方向向量为

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & -4 & 1\\3 & -1 & -2\end{vmatrix}=9i+7j+10k$$

所以直线$L$的标准式方程为 $\frac{x}{9}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-4}{10}$

# 每日一练 Day20

1、求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$________

2、求 $\int x\sin 2x dx$

3、求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x$,在初始条件 $y|_{x=0}=0$ 下的特解

4、计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx$

5、点 $(1,2,3)$ 到平面 $2x-3y+z=6$ 的距离是________

解析：

1、

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

2、

$$\int x\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int xd\cos 2x=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

3、

$P(x)=-\tan x, Q(x)=\sec x,$

通解 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]=e^{-\int\tan xdx}[\int\sec xe^{-\int\tan xdx}dx+C]$

$=e^{-\ln\cos x}[\int\sec xe^{\ln\cos x}dx+C]=\sec x(\int\sec x\cdot\cos xdx+C)$

$=\sec x(\int dx+C)=(x+C)\sec x$

将 $y|_{x=0}=0$ 代入通解，得 $C=0$，故原方程的特解为 $y=x\sec x$

4、

分段函数的积分采取积分区间可加性进行处理

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-1-1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2$$

$(x_0,y_0,z_0)$到平面$(Ax+By+Cz-D)$的距离公式：

5、$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

# 每日一练 Day21

1、函数$f(x)=\ln(x^2-1)$的定义域为 ______

2、$\int\frac{1}{1+e^x}dx=$ _____

3、微分方程$x\frac{dy}{dx}=y+x^3$的通解是 ______

4、计算$\int_3^5\frac{1}{x^2-3x+2}dx$

5、通过点$(0,0,0),(1,0,1),(2,1,0)$三点的平面方程是______

【答案解析】：

1、

由于外层是对数函数，对数函数的真数必须大于0，所以只需要$x^2-1>0$即可，解得$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2、

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx=\int\frac{1}{e^x(1+e^x)}de^x\overset{e^x=t}{=}\int\frac{1}{t(1+t)}dt=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt$$

$$=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$$

3、

$x\frac{dy}{dx}=y+x^3$方程整理得：$y'-\frac{1}{x}y=x^2$,这是一个一阶线性非齐次微分方程

利用该类方程的通解公式可得：

$$y=e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}[\int x^2\cdot e^{\int(-\frac{1}{x})}dx+C]=x[\int xdx+C]=\frac{1}{2}x^3+Cx$$

4、

对于有理函数的积分，基本思路是拆分

$$\int_3^5\frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int_3^5\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int_3^5(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1})dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^5=\ln\frac{3}{2}$$

5、

考查空间平面方程(一般式方程和点法式方程)

设平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$将三点代入，联立可得关于$ABCD$的三个一次方程组，

可得$D$=0，$A=-C,B=2C$,因此平面方程为x-2y-z=0

# 每日一练 Day22

1、

若$f'(1)=2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=$______

2、求$\int\dfrac{1+x+x^2}{x+x^3}dx$

3、微分方程$xy'-y\ln y=0$的通解是______

4、计算定积分$\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1-x^2}\,dx$

5、在$z$轴上求与点$A(3,5,-2)$和$B(-4,1,5)$等距的点$M$

【答案解析】：

1、

若$f'(1)=2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=-2\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}=-2f'(1)=-4$

2、$\int\dfrac{1+x+x^2}{x+x^3}dx=\int(\dfrac{1+x^2}{x+x^3}+\dfrac{x}{x+x^3})dx=\int(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1+x^2})dx=\ln|x|+\arctan x+C$

3、$xy'-y\ln y=0$,分离变量得$\dfrac{dy}{\ln y}=\dfrac{dx}{x}$,两边同时积分得：

$\ln\ln y=\ln x+\ln c,\ln y=cx,y=e^{cx}$

4、对于对称区间上的积分可以利用被积函数的奇偶性进行化简

$\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^1x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2)=-\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$

5、

由于所求的点$M$在$z$轴上，因而$M$点的坐标可设为$(0,0,z)$，又由于$|MA|=|MB|$，由距离公式得，

$\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2+(5-z)^2}$,从而解得z=$\dfrac{2}{7}$,即所求点为$M(0,0,\dfrac{2}{7})$

# 每日一练 Day23

1、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1-x-ax^2}{x^2},x\neq 0\\1,x=0\end{cases}$,且$f(x)$在$x=0$处连续，求$a$

2、计算$\int x\cos 2xdx$

3、求微分方程$xy'+y=x\cos x$的通解

4、计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos xdx=$______

5、设已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$(3,0,2)$，求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、和方向角

【答案解析】：

由函数$f(x)$在$x=0$处连续可得：

1、$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-ax^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-2ax}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2a}{2}=\dfrac{1-2a}{2}=1$

所以$a=-\dfrac{1}{2}$

2、$\int x\cos 2xdx=\dfrac{1}{2}\int xd\sin 2x=\dfrac{1}{2}x\sin 2x-\dfrac{1}{2}\int\sin 2xdx=\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

3、

将方程标准化为$y'+\dfrac{1}{x}y=\cos x$.此方程为一阶线性非齐次微分方程

$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int\cos xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=\dfrac{1}{x}(x\sin x+\cos x+C)$

4、

对称区间上定积分的计算经常考查被积函数的奇偶性

对于被积函数$\sin x\cos x$,其中$\sin x$是奇函数,$\cos x$是偶函数，

所以$\sin x\cos x$仍然是奇函数，所以在其对称区间上的积分为0

5、

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+2+1}=2,\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

所以$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\beta=\dfrac{3}{4}\pi,\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

# 每日一练 Day24

1、已知$f(x)$的定义域为$(0,1)$,则$f(2^x)$的定义域为_____

2、求不定积分$\int \arcsin x dx$

3、微分方程$(y+1)^2 y' + x^3 = 0$的通解

4、计算$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t^2)dt =$______

5、设$A(-1,2,0)$与$B(-1,0,-2)$为空间两点，求$A$与$B$两点间的距离

【答案解析】：

1、由于函数$f(x)$的定义域为$(0,1)$,所以$0<2^x<1$,所以$x\in(-\infty,0)$

2、$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$
$$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

3、分离变量得$(y+1)^2 dy = -x^3 dx$,两边同时积分得$\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{x^4}{4} + C$

4、
变限积分函数求导问题，需要记住常见的求导公式以及使用条件

由公式$(\int_0^x f(t)dt)' = f(x)$可知,$(\int_0^x tf(t^2)dt)' = xf(x^2)$,所以$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t^2)dt = xf(x^2)$

5、由公式可得，$AB$之间的距离为$d=\sqrt{[-1-(-1)]^2+(0-2)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}$

# 每日一练 Day25

1、已知$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=2$,所以$k=$ ______

2、计算不定积分$\int \cos^3 x dx$

3、求$x^2dy+(2xy-x+1)dx=0$满足$y(1)=0$的特解

4、已知$f(x)=\begin{cases}1+x^2, x\le 0\\ e^{-x}, x>0\end{cases}$,求定积分$\int_1^3 f(x-2)dx$

5、在空间直角坐标系中，设三点A(5,-4,1),B(3,2,1),C(2,-5,0),证明$\Delta$ABC是直角三角形

【答案解析】：

1、当$k=0$时，原极限为$\lim\limits_{x\to 0}1^{\frac{1}{x}}=1$,舍去；当$k\neq 0$时，该极限的类型为$1^{\infty}$，采用重要极限进行计算，

$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}\cdot kx\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{kx\cdot\frac{1}{x}}=e^k=2$,所以$k=\ln 2$

2、

$$\int\cos^3 xdx=\int(1-\sin^2 x)\cos xdx=\int(1-\sin^2 x)d\sin x=\int d(\sin x)-\int\sin^2 xd(\sin x)=$$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

3、

$y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$,此方程为一阶线性微分方程

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\ e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=\frac{1}{x^2}[\frac{1}{2}x^2-x+C]$$

由$y(1)=0$,得$C=\frac{1}{2}$,求得特解为$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$

4、

遇到类似计算$\int_a^b f(x-t)dx$的题目可以借助变量代换$u=x-t$将被积函数化简为单一变量的函数$f(u)$,注意换元时需要换限

$$\int_1^3 f(x-2)dx\underset{u=x-2}{=}\int_{-1}^1 f(u)du=\int_{-1}^0(1+u^2)du+\int_0^1 e^{-u}du=u+\frac{1}{3}u^3\Big|_{-1}^0-e^{-u}=\frac{7}{3}-e^{-1}$$

5、

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\{-2,6,0\},\overrightarrow{AC}=\{-3,-1,-1\}$

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-3)+6\times(-1)+0\times(-1)=0$

所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，所以$\Delta ABC$是直角三角形

# 每日一练 Day26

1、若$f(x)=\ln(1+x^2)$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3)-f(3-h)}{h}=$______

2、计算不定积分$\int(x+\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}})dx$

3、求微分方程$(x+1)y'-2y=(x+1)^5$的通解

4、计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}$

5、设向量$\vec{a}=\{1,-2,-1\},\vec{b}=\{2,0,1\}$,求$\vec{a}\times\vec{b}$的坐标

**【答案解析】**：

1、

根据导数的定义式

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,易将极限转化成$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3)-f(3-h)}{h}=-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{h}$ 2 、

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=f'(3)$,只需要求导数，而$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$,而$f'(3)=\dfrac{3}{5}$

原式$=\int xdx+2\int\sin\sqrt{x}d\sqrt{x}=\dfrac{x^2}{2}-2\cos\sqrt{x}+C$

3、

化为标准方程$y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^4$

故$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}[\int(x+1)^4e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C]=(x+1)^2[\dfrac{1}{3}(x+1)^3+C]$

4、应用洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

5、

向量$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}k=-2i-3j+4k$

因此$\vec{a}\times\vec{b}$的直角坐标为$\{-2,-3,4\}$

# 每日一练 Day27

1、已知$y=x^{\frac{1}{x}}$,则$y'=$______

2、计算不定积分$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

3、求微分方程的特解$4y''-4y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=0$

4、计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$

5、设直线$l$过两点$A(-1,2,3)$和$B(2,0,-1)$,求直线$l$的方程

**【答案解析】**：

1、

幂指函数的导数的计算，先通过对数恒等式转化为复合函数的形式，
再利用复合函数的求导方法进行计算

对于函数$y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$,所以$y'=e^{\frac{1}{x}\ln x}(\frac{1}{x}\ln x)'=x^{\frac{1}{x}}(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2})$

2、原式$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$

3、

特征方程为：$4r^2-4r+1=0, r=\frac{1}{2}$,根据二阶常系数线性微分方程解得结构得

$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2xe^{\frac{1}{2}x}$,再将两个初始条件代入就可得特解为

$y=2e^{\frac{1}{2}x}-xe^{\frac{1}{2}x}$

4、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x}=\frac{1}{2}$（$x\to 0$时，$\arctan x\sim x$）

5、

直线$l$的一个方向向量为$\overrightarrow{AB}$，则$\overrightarrow{AB}=\{3,-2,-4\}$

由直线的点向式方程可得$l$的方程为$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-4}$

# 每日一练 Day28

1、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x-\sin x}$

2、计算不定积分 $\int(2x+3)^2dx$

3、微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为

4、计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}$

5、求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

【答案解析】：

1、

当 $x\to0$ 时，此极限是 $\frac{0}{0}$ 型，可用洛必达法则

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^3}(3x^2)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{3x^2}{1+x^3}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{1+x^3}\cdot\frac{2}{x^2}=6$

2、原式 $=\frac{1}{2}\int(2x+3)^2d(2x+3)=\frac{1}{6}(2x+3)^3+C$

3、

原方程对应的特征方程为 $r^2-2r+1=0, r=1$ 为二重根

因此通解为 $(C_1+C_2x)e^x$

4、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot2x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+x^2}=1$

5、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(\pi-2x)\cdot(-2)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-4(\pi-2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{8}=-\frac{1}{8}$

# 每日一练 Day29

1、已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$在$x=1$处连续且可导，求$a,b$的值

2、计算不定积分$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx$

3、计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

4、求曲线$\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}\\ y=t^2(t-1)\end{cases}$,在$t=2$处的切线方程与法线方程

5、函数$f(x)=\sin\sqrt{9-x^2}+\ln(x-1)$的定义域是________

【答案解析】：

1、由$f(x)$在$x=1$处连续可得$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$,所以$\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b=1$

$f(x)$在$x=1$处可导可得$f'_-(1)=f'_+(1)$,所以有$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$,可以得a=2, b=-1

2、令$\sqrt{1+x}=t$，则$x=t^2-1, dx=2tdt$,于是原式$=\int\frac{2t}{1+t}dt=2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt$

$=2[\int dt-\int\frac{dt}{1+t}]=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{1+x}-2\ln\left|1+\sqrt{1+x}\right|+C$

3、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}=2$

4、

由题意得 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-2t}{t}=3t-2$,所以$\frac{dy}{dx}|_{t=2}=4$,当$t=2$时，$x=2,y=4$

所以切线方程为$y-4=4(x-2)$,即$4x-y-4=0$

法线方程为$y-4=-\frac{1}{4}(x-2)$,即$x+4y-18=0$

5、由$9-x^2\geq0,-3\leq x\leq3$,又有$x-1>0$,得$x>1$,所以函数的定义域为$(1,3]$

# 每日一练 Day30

1、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{1-\cos x}$

2、$\int_{-1}^{1}(|x|+\sin x)x^2dx$

3、曲线$y=\dfrac{1}{x-2}$的渐近线方程为 ______

4、设$f(x)=\int_0^x(t-1)\sin t dt$,则$f'(x)=$ _____

5、$x=-1$是函数$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$的 _____ 间断点

【答案解析】：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1$

2、$\int_{-1}^{1}(|x|+\sin x)x^2dx=\int_{-1}^{1}|x|x^2dx+\int_{-1}^{1}x^2\sin xdx=2\int_0^1x^3dx+0$

$=2\left[\dfrac{1}{4}x^4\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$

3、

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$,所以$x=2$为曲线的垂直渐近线,

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x-2}=0$,所以$y=0$为曲线的水平渐近线。

4、由变上限积分求导公式得，$f'(x)=(x-1)\sin x$

5、$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2}{3}$,所以$x=-1$是函数的可去间断点